

**Резюмета на публикациите****на доц. дн Милена Рачева**

за участие в конкурс за заемане на академичната длъжност „професор“  
 в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика,  
 професионално направление 4.5 Математика,  
 научна специалност „Изчислителна математика“  
 обявен в ДВ бр. 48, 13 юни 2025г.

**Хабилитационен труд – научни публикации в Scopus, Web of Science**

**8.1.** Andreev A. B., Racheva M. R. A Method for Linearization of a Beam Problem, Lecture Notes in Computer Science 10187, pp. 180-186, 2017. ISSN: 0302-9743

**Linearization of quadratic fourth-order Sturm-Liouville problems**

**Abstract.** The bending vibrations of an elastic shaft under action of compression are considered. Taking into account the beam torsion, the eigenparameter appears nonlinearly into the model fourth-order differential equation. We propose an approach for avoiding this nonlinearity using an appropriate mixed formulation and thus some variational numerical methods could be applied in a standard way. The possibility for symmetrization of the weak mixed formulation and corresponding finite element analysis are presented. Different matrix structures related to the proposed approach and its finite element implementation are discussed. Finally, we illustrate the method by numerical example.

**Линеаризация на квадратична задача на Щурм-Лиувил от четвърти ред**

**Резюме.** Разглеждат се вибрациите на огъване на еластичен вал под въздействието на натиск. Като се вземе предвид усукването на гредата, собствената стойност се появява нелинейно в моделното диференциално уравнение от четвърти ред. Предлага се подход за избягване на тази нелинейност, като се използва подходяща смесена формулировка и по този начин някои вариационни числени методи могат да се прилагат по стандартен начин. Представена е възможността за симетризиране на слабата смесена формулировка и съответния анализ на

крайните елементи. Обсъждат се различни матрични структури, свързани с предложения подход и прилагането му в областта на крайните елементи. Накрая методът се илюстрира чрез числен пример.

**8.2.** Andreev A. B., Racheva M. R. Finite Element Approximation for the Sturm-Liouville Problem with Quadratic Eigenvalue Parameter, Studies in Computational Intelligence 902 SCI (2021), pp. 368-375. ISSN: 1860-949X

#### **Linearization of quadratic second-order Sturm-Liouville problems**

**Abstract.** The eigenvalue problem considered in this paper contains both spectral parameter  $\lambda$  as well as  $\lambda^2$ . A method for linearization is presented and finite element approximation is used. Error estimate of eigenpairs is proved. Computational aspects for more general problems in this type are discussed. Finally, for the purpose of illustration numerical implementation is given.

#### **Линеаризация на квадратична задача на Щурм-Лиувил от втори ред**

**Резюме.** Задачата за собствените стойности, разглеждана в тази статия, съдържа както спектрален параметър  $\lambda$ , така и  $\lambda^2$ . Представен е метод за линеаризация и е използвана апроксимация по метода на крайните елементи. Доказана е оценката на грешките на собствените стойности и собствените функции. Обсъдени са изчислителни аспекти за по-обща задачи от този тип. Накрая, с илюстративна цел, е дадена числена реализация.

**8.3.** Andreev, A. B., Racheva, M. R. On Some Quadratic Eigenvalue Problems. Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), 2024, 13952 LNCS, pp. 455–462. ISSN: 0302-9743

#### **Linearization of quadratic second- and fourth-order Sturm-Liouville problems**

**Abstract.** In a number of second- and fourth-order boundary value problems the spectral parameter  $\lambda$  appears quadratically as well as linearly. The paper deals with eigenvalue problems of this type. Here, an approach for linearization is proposed for both second- and fourth-order problems. By suitable substitution, a variational system is obtained in which spectral parameter  $\lambda$  appears only linearly but not quadratically. Theoretical and computational aspects are considered. Combining linearization and the mixed method for fourth-order problems is also discussed. Finally, numerical results are presented.

### Линеаризация на квадратични задачи на Щурм-Лиувил от втори и четвърти ред

**Резюме.** В редица гранични задачи от втори и четвърти ред спектралният параметър  $\lambda$  участва както квадратично, така и линейно. В статията се разглеждат задачи за собствени стойности от този тип. Предложен е подход за линеаризация за задачи от втори и четвърти ред. Чрез подходящи полагания се получава вариационна система, в която спектралният параметър  $\lambda$  се появява линейно, но не и квадратично. Разгледани са теоретични и изчислителни аспекти. Комбинирането на линеаризация и смесен метод за задачи от четвърти ред също е разгледано. Накрая са представени числени резултати.

**8.4.** Andreev, A.B., Racheva, M.R., Stoyanova, R.A. (2025). Mixed Finite Element Method Applied to Sixth-Order Eigenvalue Problem. In: Slavova, A. (eds) New Trends in the Applications of Differential Equations in Sciences. NTADES 2024. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 488, 291-299. ISBN: 978-3-031-83397-7

### Numerical implementation of sixth-order eigenvalue problem by linear finite elements

**Abstract.** This work is devoted to sixth-order ordinary differential eigenvalue problems. Variational aspects are considered and discussed. The main focus is on mixed finite element formulation. Computational aspects and numerical implementation are also presented. Numerical results for a sixth-order model problem are given.

### Числова реализация на задача за собствени стойности от шести ред чрез линейни крайни елементи

**Резюме.** Тази статия е посветена на обикновени диференциални задачи за собствени стойности от шести ред. Разглеждат се и се обсъждат вариационни аспекти. Основно внимание е отделено на смесената формулировка по метода на крайните елементи. Представени са също изчислителни аспекти и числова реализация. Дадени са също числени резултати за моделна задача от шести ред.

## Публикации в Scopus, Web of Science

8.5. Andreev A. B., Racheva M. R. On the Numerical Solutions of Eigenvalue Problems in Unbounded Domains, Lecture Notes in Computer Science 4310, pp. 500-507, 2007. ISSN: 0302-9743

### Conforming method for approximation of eigenpairs in unbounded domains

**Abstract.** The aim of this study is to propose a procedure for coupling of finite element (FE) and infinite large element (ILE). This FE/ILE method is applied to the second-order self-adjoint eigenvalue problems in the plane. We propose a conforming method for approximation of eigenpairs in unbounded domains. Finally, some numerical results are presented.

### Конформен метод за приближаване на собствените двойки в неограничена област

**Резюме.** Целта на това изследване е да се предложи процедура за свързване на краен елемент и безкрайно голям елемент. Този метод е приложен към самоспрегнати задачи за собствени стойности от втори ред в равнината. Предложен е метод за приближаване на собствените двойки в неограничени области. Накрая са представени някои числени резултати.

8.6. Larsson S., Racheva M., Saedpanah F. Discontinuous Galerkin method for an integro-differential equation modeling dynamic fractional order viscoelasticity, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 283, 2015, pp. 196–209. ISSN: 0045-7825

### Discontinuous Galerkin method for integro-differential equation with a Mittag-Leffler type convolution kernel

**Abstract.** An integro-differential equation, modeling dynamic fractional order viscoelasticity, with a Mittag-Leffler type convolution kernel is considered. A discontinuous Galerkin method, based on piecewise constant polynomials, is formulated for temporal semidiscretization of the problem. Stability estimates of the discrete problem are proved, that are used to prove optimal order a priori error estimates. The theory is illustrated by a numerical example.

### Прекъснат метод на Гальоркин за интегро-диференциално уравнение с конволюционно ядро от тип Миттаг-Лефлер

**Резюме.** Разглежда се интегро-диференциално уравнение, моделиращо динамична вискоеластичност от дробен ред, с конволюционно ядро от типа на Миттаг-Лефлер. Прекъснатият метод на Гальоркин, базиран на по части константни полиноми, е формулиран

за времева полудискретизация на задачата. Доказани са оценки на устойчивостта на дискретната задача, които се използват за доказване на априорни оценки на грешките от оптимален ред. Теорията е илюстрирана с числов пример.

8.7. Andreev A. B., Racheva M. R. The Effect of a Postprocessing Procedure to Upper Bounds of the Eigenvalues, Lecture Notes in Computer Science 8962, pp. 279-286 , 2015. ISSN: 0302-9743

#### **Postprocessing technique by means of conforming and nonconforming finite elements**

**Abstract.** This paper presents a postprocessing technique applied to second- and fourth-order eigenvalue problems. It has been proved that this approach always ensures asymptotically upper bounds for corresponding eigenvalues. The main goal could be formulated as follows: if nonconforming finite elements are used giving lower bounds of eigenvalues, then the presented algorithm is a simple approach for obtaining two-sided bounds of eigenvalues; if conforming finite elements are used by origin, the postprocessing algorithm gives improved approximations of the eigenvalues, which remain asymptotically greater than the exact ones.

Some different aspects of the method applicability are also discussed. Finally, computer based implementations are presented.

#### **Апостериорна техника посредством конформни и неконформни крайни елементи**

**Резюме.** Тази статия представя апостериорна техника, прилагана към задачи за собствени стойности от втори и четвърти ред. Доказано е, че този подход винаги осигурява асимптотично горни граници за съответните собствени стойности. Основната цел може да се формулира по следния начин: ако се използват неконформни крайни елементи, даващи долни граници на собствените стойности, то представеният алгоритъм е прост подход за получаване на двустранни граници на собствените стойности; ако първоначално се използват конформни крайни елементи, то апостериорният алгоритъм дава подобрени приближения на собствените стойности, които остават асимптотично по-големи от точните стойности.

Дискутирани са различни аспекти на приложимостта на метода. Накрая са представени компютърни реализации.

**8.8.** Andreev A. B., Racheva M. R. On a Type of Nonconforming Morley Rectangular Finite Element, Lecture Notes in Computer Science 8962, pp. 287-294, 2015. ISSN: 0302-9743

**Rectangular variant of Morley finite element applied to fourth-order elliptic problems**

**Abstract.** In the recent years, the construction, analysis and application of nonconforming finite elements have been an active research area. So, for fourth-order elliptic problems conforming finite element methods (FEMs) require  $C^1$ -continuity, which usually leads to complicated implementation. This drawback could be surmounted by using nonconforming methods. These FEMs have been widely applied in computational engineering and structural mechanics. This paper deals with rectangular variants of the Morley finite elements. Beside Adini nonconforming finite element, they can be used for plates with sides parallel to the coordinate axes, such as rectangular plates. The applicability of different types of Morley rectangles applied for fourth-order problems is also discussed. Numerical implementation and results applied to plate bending problem illustrate the presented investigation.

**Четириъгълен вариант на краен елемент на Морли за елиптични задачи от четвърти ред**

**Резюме.** През последните години конструирането, анализът и прилагането на неконформни крайни елементи е обект на интензивни научни изследвания. Така например, при елиптични задачи от четвърти ред, конформните методи на крайните елементи (МКЕ) изискват  $C^1$ -непрекъснатост, което обикновено води до изчислителни трудности. Това затруднение може да бъде преодоляно чрез използване на неконформни МКЕ. Тези МКЕ са широко прилагани в инженерните пресмятания и особено в структурната механика. В настоящата статия се разглеждат правоъгълни варианти на крайните елементи на Морли. Наред с неконформните крайни елементи на Адени, те могат да бъдат използвани за задачи за плочи със страни, успоредни на координатните оси, като например правоъгълни плочи. Приложимостта на различни елементи от типа на неконформни правоъгълни елементи на Морли за задачи от четвърти ред също се дискутира. Числова реализация и резултати върху задача за огъване на плоча илюстрират представеното изследване.

**8.9.** Andreev A. B., Racheva M. R. A new algorithm for two-sided eigenvalue approximation, Comp. rend. Acad. bulg. Sci. 70(9), pp. 1207-1214, 2017. ISSN 1310-1331

**Postprocessing procedure base on nonconforming interpolant of a conforming finite element solution**

**Abstract.** The paper presents an approximation from below and above for eigenvalues of second-order elliptic operator. It is achieved by using appropriate combination of two finite element functional spaces. The simplicity of our algorithm is that in order to get an eigenvalue approximation from below it is only sufficient to interpolate the already obtained finite element solution. Here the implementation of the algorithm is also highlighted. Numerical example which demonstrates the proposed algorithm is also presented.

**Апостериорна процедура основана на неконформен интерполант на конформно крайноеlementно решение**

**Резюме.** В статията е представено приближение отдолу и отгоре за собствените стойности на елиптически оператор от втори ред. То е постигнато чрез използване на подходяща комбинация от две функционални крайноеlementни пространства. Простотата на алгоритъма се състои в това, че за да се получи апроксимация на собствената стойност отдолу, е достатъчно само да се интерполира вече получено решение на крайния елемент. Тук е детайлизирано и прилагането на алгоритъма. Представен е и числен пример, който демонстрира предложения алгоритъм.

**8.10.** Andreev A. B., Racheva M. R. Interpolated finite element method for some fourth-order elliptic problems, Dynamic Systems and Applications, 27, No. 2 (2018), pp. 423-444. ISSN 1056-2176

**Interpolated finite element method of ultraconvergent type for fourth-order elliptic problems**

**Abstract.** We introduce nonstandard interpolated finite elements providing better accuracy for a fourth-order elliptic boundary value problems, as well as to the biharmonic eigenvalue problems. The term "ultraconvergence" indicates that the convergence rate is at least two orders higher than the optimal global rate. This method is a variant of a postprocessing procedure when the known finite element solution is used. Moreover, a posteriori error estimates of global ultraconvergent type are derived. The presented approach is applicable for the general rectangular finite element meshes. Some numerical results illustrate the efficiency of the proposed algorithm.

**Метод на интерполирани крайни елементи от тип ултрасходимост за елиптически задачи от четвърти ред**

**Резюме.** Въвеждат се нестандартни интерполирани крайни елементи, които осигуряват добра точност за елиптически гранични задачи от четвърти ред, както и за бихармоничните

задачи за собствени стойности. Терминът „ултрасходимост“ показва, че скоростта на сходимост е поне с два порядъка по-висока от оптималната. Този метод е вариант на апостериорна процедура, при която се използва вече намерено приближено крайноеlementно решение. Изведени са апостериорни оценки на грешките от глобален ултрасходящ тип. Представеният подход е приложим за правоъгълни крайноеlementни мрежи от най-общ тип. Някои числени резултати илюстрират ефективността на предложения алгоритъм.

**8.11.** Racheva M. R. Seven-point finite element of integral type applied to conforming-nonconforming method, International Journal of Differential Equations and Applications 19.1 (2020). ISSN: 1314-6084

#### Seven-point finite element of integral type and its application

**Abstract.** The paper deals with integral variants of a seven-point triangular finite element. This is an enriched quadratic element constructed by adding a non-negative basis bulb-function which vanishes on the element boundary. The polynomial space which seven-point element uses is  $P_2 + \text{span}\{x^2y + xy^2\}$ . The main goal here is to determine two-sided bounds of eigenvalues for a second-order elliptic operator. The method consists of finite element solving of the problem by means of seven-point conforming element and then constructing a nonconforming interpolant of the approximate conforming eigendunctions. Thus, solving only once the eigenvalue problem, we get upper and lower bounds for the exact eigenvalues. Furthermore, the fact that the nonconforming interpolants uses the nodal values of the conforming approximate eigenfunctions gives an obvious computational advantage. Finally, numerical experiments confirming the efficiency of the proposed algorithm are also provided.

#### Седем-точков краен елемент от интегрален тип и негови приложения

**Резюме.** В статията се разглеждат интегрални варианти на седемточков триъгълен краен елемент. Това е обогатен квадратичен елемент, конструиран чрез добавяне на неотрицателна базова функция, която се анулира върху границата на крайния елемент. Полиномиалното пространство, което седемточковият елемент използва, е  $P_2 + \text{span}\{x^2y + xy^2\}$ . Основната цел тук е да се определят двустранни граници на собствените стойности за елиптичен оператор от втори ред. Методът се състои в решаване на задачата по метода на крайните елементи с помощта на седемточков конформен елемент и последващо конструиране на неконформен интерполант на приближените конформни собствени функции. По този начин,



решавайки само веднъж задачата за собствените стойности, получаваме горни и долни граници за точните собствени стойности. Освен това фактът, че неконформните интерполанти използват стойности на съответстващите приближени собствени функции във възлите, дава очевидно изчислително преимущество. Накрая са представени и числени експерименти, потвърждаващи ефективността на предложения алгоритъм.

**8.12.** S. Rachev, M. Racheva, D. Koeva, L. Dimitrov. Energy Efficient Solution for Pump System, 2022, International Conference on Communications, Information, Electronic and Energy Systems (CIEES 2022), 24-26 November 2022, Veliko Tarnovo, Bulgaria, DOI: 10.1109/CIEES55704.2022.9990625. ISBN 978-166549149-5

#### **Modelling and investigations concerning dynamic behavior of a pump system**

**Abstract.** Paper concerns the electrical part of a pumping station for a small village. Modernization of the drinking water supply system through the use of new electric driving equipment is proposed. After computer mathematical modeling, an assessment of the arising electrical losses in the driving electric motors, as well as the individual components of energy losses under different conditions has been done. Electric motors in this case are a major component and the level of energy efficiency ultimately depends on their dynamic behavior. Some of the study results have been presented in tabular and graphical form. Relevant conclusions of a recommendatory nature have been done.

#### **Моделиране и изследвания на динамиката на помпена станция**

**Резюме.** Статията се отнася до електрическата част на помпена станция за малко село. Предложена е модернизация на системата за водоснабдяване с питейна вода чрез използване на ново електрически задвижвано оборудване. След компютърно математическо моделиране се прави оценка на възникващите електрически загуби в задвижващите електродвигатели, както и на отделните компоненти на електрически загуби при различни условия. В този случай електродвигателите са основен компонент и нивото на енергийната ефективност в крайна сметка зависи от динамиката на тяхното поведение. Някои от резултатите от изследването са представени в табличен и графичен вид. Направени са съответни заключения с препоръчителен характер.

**8.13.** A.B. Andreev, M.R. Racheva, Two-sided Bounds of Eigenvalues Using Conforming and Nonconforming Finite Elements, International Journal of Differential Equations and Applications, Vol. 21 No 1 (2022), pp. 47-64. ISSN: 1314-6084

#### **Two-sided bounds of eigenvalues for second-order elliptic EVPs**

**Abstract.** The main goal of this paper is to present an original algorithm and numerical approach which gives two-sided bounds of eigenvalues for second-order elliptic operator. The method consists of finite element solving of the problem, making a choice of conforming elements and then constructing corresponding nonconforming interpolant of the approximate conforming eigenfunctions. Thus, solving only once the eigenvalue problem, we get upper and lower bounds for the exact eigenvalues. For this purpose we apply integral type finite elements, which use integral values on their edges or/and on the elements itself as degrees of freedom. From a practical point of view our aim is to use lowest possible order finite elements. Furthermore, the fact that the nonconforming interpolants use the nodal values of the conforming approximate eigenfunctions gives an obvious computational advantage. Computational aspects of the algorithm are discussed. Finally, numerical experiments are also provided.

#### **Двустранни оценки на собствените стойности за елиптически задачи за собствени стойности от втори ред**

**Резюме.** Основната цел на тази статия е да представи оригинален алгоритъм и числен подход, който дава двустранни граници на собствените стойности за елиптически оператори от втори ред. Методът се състои в решаване на задачата по метода на крайните елементи, като се прави избор на съответстващи конформни елементи и след това конструиране на съответните неконформни интерполанти на приближените конформни собствени функции. По този начин, решавайки само веднъж задачата за намиране на собствени стойности, получаваме горни и долни граници за точните собствени стойности. За тази цел прилагаме крайни елементи от интегрален тип, които използват интегрални стойности върху страните на елементите и/или върху целите елементи като степени на свобода. От практическа гледна точка целта е да използваме крайни елементи от възможно най-нисък ред. Освен това фактът, че неконформните интерполанти използват възловите стойности на конформните приближени собствени функции, предоставя очевидно изчислително улеснение. Дискутирани са изчислителните аспекти на алгоритъма. Накрая са представени и числови експерименти.

**8.14.** A.B. Andreev, M.R. Racheva, Mixed Finite Element Approximation for Sixth-order Eigenvalue Problem. Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), accepted for publication. ISSN: 0302-9743

#### **Convergence results for mixed FEM applied to sixth-order eigenvalue problems**

**Abstract.** This paper deals with sixth-order self-adjoint Sturm-Liouville problem. The mixed finite element method is considered, with the main objective being to obtain approximation using piecewise linear polynomials. Variational aspects are discussed and error estimate is given for the approximate eigenvalues. Numerical results are also presented.

#### **Оценка на сходимост за смесен МКЕ приложен към задачи от шести ред**

**Резюме.** Тази статия се занимава със самоспрегната задача на Щурм-Лиувил от шести ред. Разглежда се смесеният метод на крайните елементи, като основната цел е да се получи апроксимация с помощта на по части линейни полиномиални функции. Разгледани са вариационни аспекти и е дадена оценка на грешката за приближените собствени стойности. Представени са и числови резултати.

**8.15.** Rachev S., Racheva M., Dimitrov L. (2025), Data processing of energy generated by hydroelectric power plant. In E3S Web of Conferences (Vol. 638, p. 02005). EDP Sciences. ISSN 2555-0403

#### **Statistical processing of energy data**

**Abstract.** Paper deals with an issue related to the operation of hydro-electric power plant. There is a computational part for measured and processed electrical quantities. The rules of mathematical statistics have been followed in the processing of the initial data to obtain relevant results. The data processed is for a certain time period for a real hydroelectric power plant and represent values for active and reactive energy. The main goal is analyzing these data and obtaining results after processing with a view to get their trends and improving operational work. The tables and figures prepared, covering the results of the calculations. Other data handling is also possible, but those carried out so far show certain trends.

#### **Статистическа обработка на енергийни данни**

**Резюме.** Статията разглежда въпроси от експлоатацията на водноелектрическа централа. Изчислителната част съдържа измерени и обработени електрически величини. С цел

релевантни резултати, при обработката на данните са спазени законите на математическата статистика. Обработени са данни за определен период от време за реална водноелектрическа централа – стойности за активна и реактивна енергия. Основният фокус е анализ на тези данни и получаване на резултати от обработката им с цел откриване на тенденциите им и подобряване на оперативната работа. Представени са таблици и фигури, обхващащи резултатите от изчисленията. Въпреки, че получените резултати показват определени тенденции, е възможна и по-нататъшна обработка на данните.

### Публикации в Zentralblatt für Mathematik

**8.16.** Todorov T. D., Racheva M. R. Two-level method for isoparametric problems, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol. 73, pp. 188-195, 2000. ISSN 0179-9614

#### Convergence analysis of a two-level method for isoparametric problems

**Abstract.** Solving elliptic boundary value problems over curved domains with piecewise polynomial boundary is considered. A convergence analysis of a two-level method using hierarchical refinement of the initial triangulation and an isoparametric technique is presented. The theory of convergence is strongly based on the strengthened Cauchy-Buniakowskii-Schwarz inequality. Some sufficient conditions for its existence are discussed. Using a spectral analysis of the generalized eigenvalue problem, an upper bound for the constant  $\gamma$  in the strengthened Cauchy inequality is found. The resulting stiffness matrix is preconditioned by a diagonal block matrix. An application of the method for solving fourth-order problems is given at the end of the paper.

#### Анализ на сходимост на двунивов метод за изопараметрични задачи

**Резюме.** Разглежда се решаването на елиптични гранични задачи върху области с криволинейни по части полиномиални граници. Представен е анализ на сходимостта на двунивов метод, използващ йерархично съгъстяване на началната триангулация и изопараметрична техника. Теорията на сходимостта се базира основно на усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц. Дискутират се някои достатъчни условия за съществуването му. Посредством спектрален анализ на общата задача за собствените стойности е намерена горна граница за константата  $\gamma$  в усиленото неравенство на Коши. Получената матрица на коравина е преобусловена от диагонална блочна матрица. В края на статията е дадено приложение на метода за решаване на задачи от четвърти ред.

**8.17.** Todorov T. D., Racheva M. R. Applications of a two-level method for isoparametric iterative scheme for solving elliptic problems, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol. 73, pp. 196-203, 2000. ISSN 0179-9614

#### **Applications of a two-level method for isoparametric problems**

**Abstract.** The paper focuses on solving the Poisson equation and fourth-order elliptic equations on two-dimensional domains with Lipschitz-continuous boundary, consisting of a finite number of smooth arcs. Finite element method with an isoparametric technique is used. The problem is discretized in the terms of two-level hierarchical ordering.

#### **Приложение на двунивов метод за изопараметрични задачи**

**Резюме.** Статията е посветена на решаването на уравнението на Поасон и елиптични уравнения от четвърти ред върху двумерни области с непрекъсната Липшицова граница, състояща се от краен брой гладки дъги. Използва се методът на крайните елементи с изопараметрична техника. Задачата е дискретизирана в термините на двунивова йерархична подредба.

#### **Публикация в нереферирани списания с научно рецензиране или в редактирани колективни томове**

**8.18.** A. Andreev, M. Balev, P. Ivanov, M. Racheva, On the polynomial spaces of rectangular Morley elements, International Conference UNITECH 2013, 22-23 Nov. 2013, Gabrovo, Vol. 2, 402-405. ISSN: 1313-230X

#### **Types of nonconforming rectangular Morley finite elements**

**Abstract.** Some computational aspects of three types of rectangular Morley finite elements are analyzed. The basic functions are presented. A coincidence between two of the considered polynomial sets is proved. Numerical experiments applied to the plate bending vibration problem are performed.

#### **Видове неконформни четириъгълни крайни елементи на Морли**

**Резюме.** Анализират се някои изчислителни аспекти на три вида правоъгълни крайни елементи на Морли. Представени са техните базисни функции. Доказано е съвпадение между две от разглежданите полиномиални множества. Проведени са числени експерименти, приложени към задачата за огъване на плоча, подложена на вибрации.

**8.19.** A. Andreev, M. Racheva, A new nonconforming recovery algorithm for two-sided bounds of eigenvalues, Journal of TU-Gabrovo, Vol. 49 (2015), 34-38. ISSN: 1310-6686

**Two-sided bounds of eigenvalues for second- and fourth-order problems**

**Abstract.** In recent papers the authors present and develop an original method for obtaining two-sided bounds of the exact eigenvalues. This idea is based on the combination of nonconforming finite element methods giving lower bounds of eigenvalues and a postprocessing procedure using conforming finite element spaces. Here a new approach is proposed, applicable to second- and fourth-order eigenvalue problems. Namely, a conforming finite element method is used for eigenpairs approximation and then by means of nonconforming recovery interpolant a lower bound approximation of the exact eigenvalues is obtained when the mesh parameter  $h$ ,  $h > 0$ , is sufficiently small. Some appropriate combinations of finite elements (conforming and nonconforming) which fulfil the algorithm are presented and discussed. Numerical experiments illustrating the efficiency of the proposed method are also given.

**Двустранни оценки на собствени стойности за задачи от втори и четвърти ред**

**Резюме.** В своите последни статии авторите представят и развиват оригинален метод за получаване на двустранни граници на точните собствени стойности. Тази идея се основава на комбинацията от неконформни методи на крайните елементи, даващи долни граници на собствените стойности, и процедура за апостериорна обработка, използваща конформни пространства на крайните елементи. Предлага се нов подход, приложим към задачи за собствени стойности от втори и четвърти ред. По-конкретно, за апроксимация на собствените двойки се използва конформен метод на крайните елементи и след това чрез неконформен интерполант за възстановяване се получава апроксимация отдолу на точните собствени стойности, при достатъчно малък мрежови параметърът  $h$ ,  $h > 0$ . Представени и дискутирани са някои подходящи за алгоритъма комбинации от крайни елементи (конформни и неконформни). За илюстрация на ефективността на метода са дадени и числени експерименти.

**8.20.** A. B. Andreev, M. R. Racheva, A postprocessing procedure for eigenvalue problems – bounds and estimates, Сборник с доклади от международна научно-практическа конференция „Математиката като фундаментална и приложна наука”, Икономически университет – Варна, 110-119, 2015. ISBN 978-954-21-0860-3

**A postprocessing procedure for eigenvalue problems**

**Abstract.** The presented finite element (FE) postprocessing technique is applied and analyzed to

second- and fourth-order eigenvalue problems defined on polygonal plane domains. We prove that this approach always ensures asymptotically upper bounds for corresponding eigenvalues. Then, the comparisons of these cases are made and proved. One of the important effects of our investigation could be formulated as follows: if nonconforming FEs are used giving lower bounds of eigenvalues, the presented algorithm is a simple method for obtaining two-sided bounds of eigenvalues. Moreover, the postprocessing procedure gives improved approximation of the eigenpairs. Some computational particularities are discussed and numerical results are also presented.

#### **Апостериорна процедура за задача за собствени стойности**

**Резюме.** Представената апостериорна крайноелементна (КЕ) техника е анализирана и приложена за задачи собствени стойности от втори и четвърти ред, дефинирани върху многоъгълни равнинни области. Доказва се, че подходът винаги осигурява асимптотично горни граници за съответните собствени стойности. Направено е сравнение на тези случаи. Един от важните ефекти на тези изследвания е, че ако се използват неконформни КЕ, даващи долни граници на собствените стойности, то представеният алгоритъм е прост метод за получаване на двустранни граници на собствените стойности. При това, приложената апостериорна процедура дава подобро приближение на собствените двойки. Дискутират се някои изчислителни особености и са представени числови резултати.

**8.21.** A.B. Andreev, M.R. Racheva, On a conforming-nonconforming finite element algorithm, International Conference UNITECH 2015, 20-21 Nov. 2015, Gabrovo, Vol. 2, 379-382. ISSN: 1313-230X

#### **A conforming-nonconforming finite element algorithm**

**Abstract.** In this work the effect of appropriate combinations of finite elements giving asymptotically two-sided bounds of eigenvalues is demonstrated. This approach is proposed and applicable to second- and fourth-order elliptic eigenvalue problems. The use of different types of finite elements is illustrated and discussed. Numerical experiments which confirm the recent theoretical results of the authors are also presented.

#### **Конформно-неконформен крайноелементен алгоритъм**

**Резюме.** В тази работа се изследва ефектът на подходящи комбинации от крайни елементи, даващи асимптотично двустранни граници на собствени стойности. Подходът е предложен и

приложим за елиптични задачи за собствени стойности от втори и четвърти ред. Използването на различни видове крайни елементи е илюстрирано и обсъдено. Представени са и числени експерименти, потвърждаващи последните теоретични резултати на авторите.

**8.22.** A. Andreev, H. Hristov, G. Iliev, M. Racheva, Mathematical model for a pneumatic force actuator system, Journal of TU-Gabrovo, Vol. 53 (2016), 46-49. ISSN 1310-6686.

#### **A new mathematical model for a pneumatic force actuator system**

**Abstract.** We consider pneumatic cylinder tubes that connect valves with actuators. The aim of this work is to obtain a new mathematical model for online control applications. For that purpose, a second-order hyperbolic equation corresponding to the model problem is derived. The Laplace transform is used and by this approach a sufficiently simple and applicable model is derived. The effect of different mathematical models for the considered problem is also discussed. Finally, some validation experiments by real engineering parameters are presented.

#### **Нов математически модел на система с пневматичен силов задвижващ механизъм**

**Резюме.** Разглеждат се пневматични цилиндрични тръби, които свързват клапани със задвижващи механизми. Целта на тази работа е да се създаде нов математически модел за онлайн приложения за управление. За тази цел е изведено хиперболично уравнение от втори ред, съответстващо на моделната задача. Използва се трансформацията на Лаплас и чрез този подход се получава достатъчно прост и приложим модел. Обсъжда се също така ефектът на различните математически модели за разглеждания проблем. Накрая, за валидиране, са представени някои експерименти с реални инженерни параметри.

**8.23.** A.B. Andreev, M.R. Racheva, A method for finding the eigenvalues of 3x3 real matrices, International Conference UNITECH 2016, 18-19 Nov. 2016, Gabrovo, Vol. 2, 394-397. ISSN: 1313-230X

#### **A new algorithm for computing of 3x3 matrix eigenvalues**

**Abstract.** The present study is devoted to a new approach for calculating approximate values of the eigenvalues of  $3 \times 3$  real matrices. This method consists of approximating the separated and positive root of a suitable cubic polynomial. Using this value as well as the matrix traces and determinant, all eigenvalues are directly computed. We illustrate the method by numerical examples.



### Нов алгоритъм за пресмятане на собствени стойности на матрица от тип $3 \times 3$

**Резюме.** Настоящото изследване е посветено на нов подход за изчисляване на приближения на собствените стойности на реални матрици от тип  $3 \times 3$ . Този метод се състои в апроксимиране на отделен и положителен корен на подходящ кубичен полином. Използвайки тази стойност, както и следите и детерминантата на матрицата, всички собствени стойности се изчисляват директно. Методът е илюстриран с числови примери.

**8.24.** A.B. Andreev, M.R. Racheva, On the mathematical model of rotating shaft, International Scientific Journal "Industry 4.0" – Scientific Technical Union of Mechanical Engineering, Vol. 2(2017), 81-84. ISSN 2543-8582

### A mathematical model of rotating shaft

**Abstract.** The paper deals with a shaft subjected to an axial pressure with force  $P$  and relatively high moment of rotation  $M$ . In order to determine the lines of deflection we propose various approaches. The assessment of critical values of  $P$  and  $M$  is also discussed when loss of stability is available. Thus two fourth-order eigenvalue problems are considered and their mixed variational models are proposed. Finally, some numerical experimental results are presented.

### Математически модел на въртящ се вал

**Резюме.** Статията разглежда вал, подложен на натиск по оста със сила  $P$  и относително голям въртящ момент  $M$ . За определяне на линиите на деформация се предлагат различни подходи. Обсъжда се оценката на критичните стойности на  $P$  и  $M$ , когато е налице загуба на устойчивост, като се разглеждат две задачи от четвърти ред за собствени стойности и се предлагат техните смесени вариационни модели. Представени са някои числови експериментални резултати.

**8.25.** Andreev A. B., M.R. Racheva. Numerical Aspects for Obtaining Two-sided Bounds of Eigenvalues. International Scientific Journal "Science. Business. Society", 3, Scientific Technical Union of Mechanical Engineering, 2017, 104-107, ISSN:2367-8380.

### Two-sided bounds of eigenvalues for second-order problem

**Abstract.** In this paper a new algorithm and numerical approach which gives two-sided approximations of eigenvalues for second-order problem is presented. Conforming finite element methods are used in combination with an appropriate nonconforming interpolation. Numerical aspects are discussed and also experiments which demonstrate the proposed algorithm are given.

### Двустранни оценки на собствени стойности за задача от втори ред

**Резюме.** В тази статия е представен нов алгоритъм и числен подход, който дава двустранни апроксимации на собствените стойности за задачи от втори ред. Използват се конформни методи на крайните елементи в комбинация с подходяща неконформна интерполация. Разгледани са изчислителни аспекти, а също така са дадени експерименти, които демонстрират предложения алгоритъм.

**8.26.** M.R. Racheva, A.B. Andreev (2017). On the Use of Conforming and Nonconforming Rectangular Finite Elements for Eigenvalue Approximations, *Mathematical Modeling*, Vol. 3(2017), 127-130. ISSN 2535-0986

### Nonconforming rectangular finite elements

**Abstract.** The paper deals with some combinations of conforming and nonconforming rectangular finite elements for obtaining two-sided bounds of eigenvalues, applied to second-order elliptic operator. The aim is to use the lowest possible order finite elements. Namely, the combination of serendipity conforming and rotated bilinear nonconforming elements is considered in detail. This work continues research concerning eigenvalue approximations. Computational aspects of the used algorithm are also discussed and results from numerical experiments are presented.

### Неконформни четириъгълни крайни елементи

**Резюме.** Разглеждат се някои комбинации от конформни и неконформни правоъгълни крайни елементи с цел получаване на двустранни граници на собствените стойности, приложени към елиптичен оператор от втори ред. Идеята е да се използват крайни елементи от възможно най-нисък ред. По-конкретно, подробно е разгледана комбинацията от конформни и ротирани билинейни неконформни елементи. Тази работа продължава други изследвания на авторите относно апроксимациите на собствените стойности. Обсъдени са и изчислителните аспекти на използвания алгоритъм и са представени резултати от числени експерименти.

**8.27** Andreev, A., & Racheva, M. (2018). Mixed variational properties for some fourth-order beam problems. *Mathematical Modeling*, 2(4), 122-125. ISSN 2535-0986

### Variational aspects of mixed formulation for fourth-order beam problems

**Abstract.** In this paper we study eigenvalue problems for fourth-order ordinary differential equations. These boundary problems usually describe the bending vibrations of a homogeneous

beam. Our aim here is to present mixed variational forms depending on a wide class of boundary conditions. In particular, we show when the symmetry in variational formulations is available. This property ensures real spectrum of the corresponding problem. The effect of the theoretical results is illustrated by some realistic examples.

#### **Вариационни аспекти на смесена формулировка на задачи за греди от четвърти ред**

**Резюме.** В тази статия се изследват задачи за собствени стойности за обикновени диференциални уравнения от четвърти ред. Тези гранични задачи обикновено описват вибрациите при огъване на хомогенна греда. Целта е представяне на смесени вариационни формулировки, зависещи от широк клас гранични условия. По-специално, показано е кога има симетрия във вариационните форми. Това свойство осигурява реален спектър на съответната задача. Ефектът от теоретичните резултати е илюстриран с някои реалистични примера.

**8.28.** Рачев С., М. Рачева, Д. Коева, Л. Димитров. ТЕКУЩО СЪСТОЯНИЕ И СЪВРЕМЕННИ ТЕНДЕНЦИИ В РАЗВИТИЕТО НА ЕЛЕКТРИЧЕСКИТЕ ПРЕВОЗНИ СРЕДСТВА – ЧАСТ I: ОБЩ ПРЕГЛЕД НА РАЗРАБОТВАНЕТО, Енергиен форум 2018, 26-29 юни 2018, к.к. „Св. Св. Константин и Елена”, Сборник, 285-300. ISSN 2367-6728

#### **Electric cars**

**Abstract.** Paper deals with general overview of the production, sales and use of electric cars. The main result is to obtain the most complete picture possible of the electrical mobility current situation.

#### **Електромобили**

**Резюме.** Статията се занимава с общ преглед на производството, продажбите и използването на електрически автомобили. Основният резултат е получаването на възможно най-пълна картина на настоящата ситуация в областта на електрическата мобилност.

**8.29.** Рачев С., М. Рачева, Д. Коева, Л. Димитров. ТЕКУЩО СЪСТОЯНИЕ И СЪВРЕМЕННИ ТЕНДЕНЦИИ В РАЗВИТИЕТО НА ЕЛЕКТРИЧЕСКИТЕ ПРЕВОЗНИ СРЕДСТВА – ЧАСТ II: СПЕЦИФИКИ В БЪЛГАРИЯ, Енергиен форум 2018, 26-29 юни 2018, к.к. „Св. Св. Константин и Елена”, Сборник, 301-314. ISSN 2367-6728

#### **Electric cars**

**Abstract.** Paper deals with specifics in Bulgaria in the use of electric cars. The contribution is an attempt to create the public attitude, model and/or attention to a new type of vehicles and how

electromobility affects the broader vision of future transport and infrastructure, changing business and life as we know it.

### **Електромобили**

**Резюме.** Статията разглежда особеностите в България по отношение на използването на електрически автомобили. Приносът е опит за създаване на обществена нагласа, модел и/или внимание към един нов тип превозни средства и как електромобилността влияе върху пошироката визия за бъдещия транспорт и инфраструктура, променяйки бизнеса и живота, каквито ги познаваме.

**8.30.** Rachev, S., Racheva, M., Andreev, A., & Ganchev, D. (2021). Mathematical software tools applicable to remote learning and scientific research in case of isolation. *Mathematical Modeling*, 5(1), 8-12. ISSN 2535-0986

### **Online available mathematical software tools**

**Abstract.** This paper is devoted to some up-to-date computational tools, which are on-line available and appropriate to remote learning as well as to scientific research implementation relevant to mathematics and their applications. The following aspects are concerned and discussed: some of the opportunities and benefits afforded by the software tools which are taken into consideration; necessary requirements which have to be met in order to use these tools; some disadvantages and drawbacks which may arise. Comparison of fees and prices for different mathematical software tools is done. For purpose of illustration realistic examples are also given.

### **Онлайн достъпни математически софтуерни средства**

**Резюме.** Тази статия е посветена на някои съвременни изчислителни средства, които са достъпни онлайн и са подходящи за дистанционно обучение, както и за провеждане на научни изследвания в областта на математиката и нейните приложения. Обсъждат се следните аспекти: възможности и ползи, които предоставят разглежданите софтуерни средства; необходими изисквания, които трябва да бъдат изпълнени, за да се използват тези софтуерни средства; някои пречки и недостатъци, които могат да възникнат. Направено е сравнение на абонаментни такси и цени на различните математически софтуерни средства. С илюстративна цел са дадени и реалистични примери.

**8.31.** M. Racheva, Some aspects of remote exams, *Mathematical Modeling*, Mathematical Modeling, year VI, Issue 2/2022, pp. 29-32. ISSN 2535-0986.

### Remote exams in Mathematics

**Abstract.** The paper is devoted to distance exams, as in that the focus is on mathematical disciplines. Some advantages are standing out, as well as significant disadvantages have been discussed. Current modern tools are considered, which are applied both in the preparation of students and in distance exams.

### Дистанционни математически изпити

**Резюме.** Статията е посветена на дистанционните изпити, като фокусът е върху математическите дисциплини. Изтъкват се някои предимства, както и значителни недостатъци. Разгледани са актуални съвременни инструменти, които се прилагат както при подготовката на студентите, така и при дистанционните изпити.

**8.32.** Rachev S., M. Racheva, L. Dimitrov, Low power photovoltaic system implemented by means of flexible module. International Scientific Journal "INDUSTRY 4.0", Bulgaria, Issue 2/2022, pp. 54-58. ISSN 2534-8582.

### Low power photovoltaic system

**Abstract.** Paper deals with low power photovoltaic system implemented by means of flexible module. Flexible modules powered by sunlight are really a very interesting and promising novelty, being one of the newer alternative energy sources. A selected technical solution with specific characteristics of the individual components is presented. Measurements with digital measuring equipment were performed and experimental results were presented. In conclusion, it is summarized that the tested flexible module gives good results.

### Фотоволтаична система с ниска мощност

**Резюме.** Статията разглежда фотоволтаична система с ниска мощност, реализирана чрез гъвкав модул. Гъвкавите модули, захранвани от слънчева светлина, са действително много интересна и обещаваща новост, тъй като са един от по-съвременните алтернативни източници на енергия. Избрано е техническо решение със специфични характеристики на отделните компоненти. Извършени са измервания с цифрова измервателна апаратура и са представени експериментални резултати. Като заключение, тестваният гъвкав модул дава добри резултати.

**8.33.** Rachev S., M. Racheva, Analysis of Operational Data on the Work of Hydro Power Plant. International Scientific Journal "INDUSTRY 4.0", Bulgaria, Issue 6/2022, pp. 54-58. ISSN 2534-8582.

### Statistical processing of operational data

**Abstract.** Paper focuses on the use of renewable energy sources and in particular the use of water energy. A hydro power plant is a complex of facilities and equipment for converting the energy of the water flow into electrical energy. The advantages of hydro power plants are obvious – a supply of energy constantly renewed by nature itself, simplicity of operation, absence of environmental pollution. Taking into account the growing role of small and medium-sized enterprises in the economic development, both of an individual country and on a global scale, as well as the widespread orientation towards the use of renewable energy sources in the production of electricity, the main goal of the current development is the analysis of the operation of the electrical part of a specific hydro power plant with small power. Statistical processing of operational data on the change of certain variables was carried out. In conclusion, it is summarized that the hydro power plant under consideration has good operational indicators.

### Статистическа обработка на оперативни данни

**Резюме.** Статията е посветена на използването на възобновяеми енергийни източници и по-специално на използването на енергията на водата. Водната електроцентрала е комплекс от съоръжения и оборудване за преобразуване на енергията на водния поток в електрическа енергия. Предимствата на водните електроцентрали са очевидни - снабдяване с енергия, която постоянно се обновява от самата природа, простота на експлоатацията, липса на замърсяване на околната среда. Като се има предвид нарастващата роля на малките и средните предприятия в икономическото развитие както на отделна страна, така и в световен мащаб, а и широко разпространената ориентация към използване на възобновяеми енергийни източници при производството на електроенергия, основната цел на настоящата разработка е анализът на работата на електрическата част на конкретна водноелектрическа централа с малка мощност. Извършена е статистическа обработка на оперативните данни за изменението на определени променливи величини. В заключение се обобщава, че водноелектрическата централа има добри експлоатационни показатели.

**8.34.** Рачев С., М. Рачева, Л. Димитров. Пленарен доклад: Електромобилите – не бъдеще, а настояще – актуално състояние на пазара на нови и употребявани електромобили в България, Енергиен форум, 28 юни – 01 юли 2022, Научно-технически съюз на енергетиците в България, Сборник доклади, стр. 18-51, ISSN 2367-6728.

### Electric cars

**Abstract.** Paper deals with a general overview of the state of the market for new and used fully electric passenger cars. Technical and economic considerations and characteristics have been indicated. Relevant sources of information have been used. Detailed information would be useful for all interested and related to the topic of electric mobility.

#### **Електромобили**

**Резюме.** Предмет на статията е общ преглед на състоянието на пазара за нови и употребявани напълно електрически леки автомобили. Технически и икономически съображения и характеристики са открити. Използвани са съответни източници на информация. Подробните и систематизирани данни биха били полезни за всички, свързани с и интересувани се от тематиката за електрическата мобилност.

**8.35.** Racheva, M. (2023). Dependencies between functions in Fourier transforms. Mathematical Modeling, 7(2), 36-39. ISSN 2535-0986

#### **Fourier transforms**

**Abstract.** Obtaining source functions in Fourier transform on the base of some knowing frequency distributions are presented. The proposed approach allows to study the properties of the obtained results. This technique is used for calculation of some improper integrals as well.

#### **Трансформации на Фурие**

**Резюме.** Представено е получаването на оригиналните функции в трансформацията на Фурие на базата на някои известни честотни разпределения. Предложеният подход позволява да се изследват свойствата на получените резултати. Също така, тази техника се използва за изчисляване на някои несобствени интеграли.

**8.36.** Racheva M. Discrete data approximations and their application in engineering research, International Scientific Conference UNITECH 2023, 17-18 November 2023, Gabrovo, pp. II 246 – II 249, ISSN 1313-230X

#### **Discrete data approximations**

**Abstract.** In this paper we present an important aspect in engineering practice. Namely: how to use effectively the data obtained as a result of measurements and approximations of required dependences and parameters. Our aim is to show different approaches to such computations and their

philosophy for the engineering applications. Emphasis is placed on the approximation of a limited discrete set of data in order to get Fourier harmonics, when the periodic function is unknown. This idea is supported by realistic and numerically solved examples.

### **Приближаване на дискретни данни**

**Резюме.** В тази статия е представен важен аспект в инженерната практика, а именно: как да се използват ефективно данните, получени в резултат на измервания и апроксимации на необходимите зависимости и параметри. Целта е да бъдат показани различни подходи към такива изчисления и тяхната философия за инженерните приложения. Акцентът е поставен върху апроксимацията на ограничен дискретен набор от данни, за да се получат хармоници на Фурие, когато периодичната функция е неизвестна. Тази идея е подкрепена с реалистични и числено решени примери.

**8.37.** M. Racheva. On the Fourier Transform for Periodic Functions, Mathematical Modeling, 8(3), 91-93, 2024. ISSN 2535-0986

### **Fourier transforms**

**Abstract.** The paper deals with some aspects of the presentation and application of periodic time-dependent functions in the Fourier analysis. Different approaches for defining and utilizing periodic functions are considered. The case when one has only a discrete set of values obtained from measurement and the function itself is not known is also included. In general, the type and the shape of the corresponding frequency distribution is a point of interest and discussion. The paper presents numerous examples which illustrate the proposed ideas.

### **Трансформации на Фурие**

**Резюме.** Статията разглежда някои аспекти на представянето и прилагането на периодични функции, зависещи от времевата променлива, в областта на Фуриеровия анализ. Разгледани са различни подходи за дефиниране и използване на периодични функции. Включен е и случаят, при който разполагаме само с дискретно множество от функционални стойности, получени от измерване, а самата функция не е известна. Като цяло, предмет на интерес и обсъждане е видът и формата на съответното разпределение на честотите. В статията са представени множество примери, които илюстрират предложените идеи.